

Chương 4. Hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Bài 1. Tỷ số lượng giác của góc nhọn.

A. LÝ THUYẾT.

1) Khái niệm tỷ số lượng giác của góc nhọn.

Ví dụ 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , với góc nhọn B thì

Cạnh BC gọi là cạnh huyền.

Cạnh AC là cạnh đối và cạnh AB là cạnh kề.

♣ Khi đó ta có 4 tỷ số lượng giác của góc nhọn B như sau:

$$+ \sin B = \frac{AC}{BC} \text{ (tỷ số cạnh đối và cạnh huyền)} \quad + \cos B = \frac{AB}{BC} \text{ (tỷ số cạnh kề và cạnh huyền)}$$

$$+ \tan B = \frac{AC}{AB} \text{ (tỷ số cạnh đối và cạnh kề)} \quad + \cot B = \frac{AB}{AC} \text{ (tỷ số cạnh kề và cạnh đối)}$$

♣ Chú ý: Giá trị $\sin$ và $\cos$ của một góc nhọn luôn nhỏ hơn 1 (vì trong tam giác vuông, cạnh huyền là cạnh lớn nhất).

Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $BC = 10 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. Tính tỷ số lượng giác của góc nhọn C .

Bài làm

Áp dụng định lý Pythagore ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2 = 6 \text{ cm}$$

Khi đó ta có các tỷ số lượng giác của góc C là:

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \quad \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

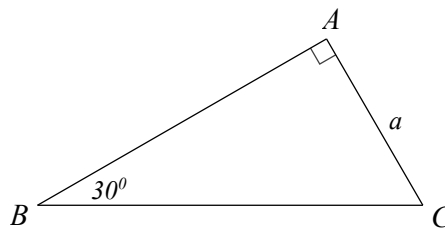
$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}; \quad \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

♣ Giá trị lượng giác của các góc 30° ; 45° ; 60° .

Ví dụ 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$ và $AC = a$

Tính cạnh AB , BC theo a .

Bài làm



$$\text{Ta có } \tan B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{AB} \Rightarrow AB \cdot \sqrt{3} = 3a \Rightarrow AB = \frac{3a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{và } \sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{BC} \Rightarrow BC = 2a.$$

2) Tỷ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

Ví dụ 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Khi đó $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là hai góc phụ nhau

♣ **Định lý:**

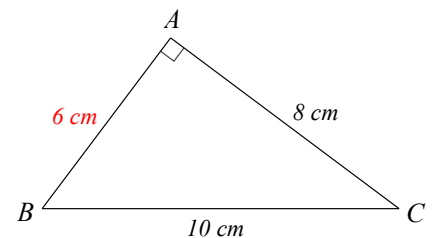
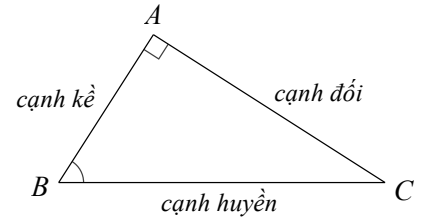
Nếu hai góc phụ nhau thì $\sin$ góc này bằng $\cos$ góc kia và $\tan$ góc này bằng $\cot$ góc kia.

$$\sin B = \cos C$$

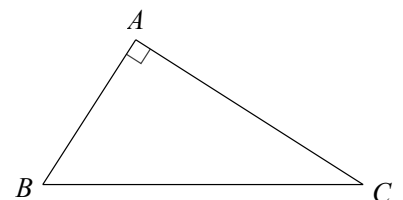
$$\cos B = \sin C$$

$$\tan B = \cot C$$

$$\cot B = \tan C$$



	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



Chú ý:

Một số công thức biến đổi

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Ví dụ 5: Tính $\frac{\sin 32^\circ}{\cos 58^\circ}$ và $\tan 80^\circ - \cot 10^\circ$

Bài làm

Vì góc 32° và góc 58° là hai góc phụ nhau, nên $\frac{\sin 32^\circ}{\cos 58^\circ} = \frac{\cos 58^\circ}{\cos 58^\circ} = 1$.

Vì góc 80° và góc 10° là hai góc phụ nhau, nên $\tan 80^\circ - \cot 10^\circ = \cot 10^\circ - \cot 10^\circ = 0$

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Tính các biểu thức sau

a) $A = \tan 76^\circ - \cot 14^\circ$

b) $B = \sin 33^\circ - \cos 57^\circ$

c) $C = \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$

d) $D = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ$

e) $E = \tan 30^\circ + \cot 60^\circ$

f) $F = 2 \cdot \tan 45^\circ - \cot 60^\circ$

Bài 2: Tính các biểu thức sau

a) $A = \frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ}$

b) $B = \frac{\tan 50^\circ}{\cot 40^\circ}$

c) $C = \frac{\sin 70^\circ}{\tan 70^\circ}$

Bài 3: Tính biểu thức

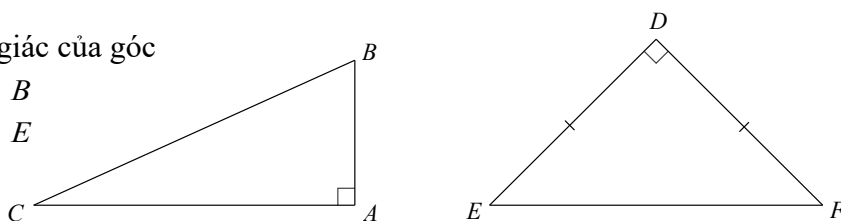
a) $M = \sin 10^\circ \cdot \cos 80^\circ + \cos 10^\circ \cdot \sin 80^\circ$

b) $N = \frac{\sin 58^\circ}{\cos 32^\circ} - \cos 60^\circ + \tan 37^\circ \cdot \tan 53^\circ + \sin 30^\circ$

Bài 4: Cho Hình 1. Viết tỉ số lượng giác của góc

a) Viết tỉ số lượng giác của góc B

b) Viết tỉ số lượng giác của góc E

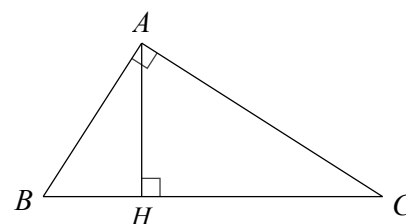


Hình 1

Bài 5: Cho Hình 2.

a) Viết tỉ số lượng giác của góc B trong $\triangle ABC$ và $\triangle ABH$.

b) Chứng minh hệ thức $AH \cdot BC = AB \cdot AC$.

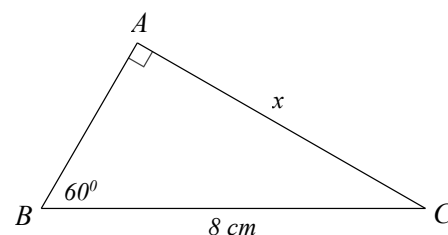


Hình 2

Bài 6: Cho Hình 3.

a) Tìm x .

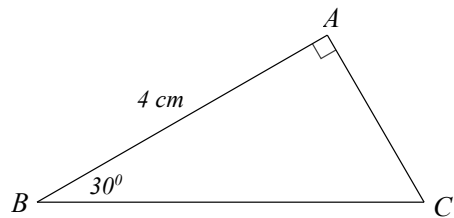
b) Tính cạnh AB .



Hình 3

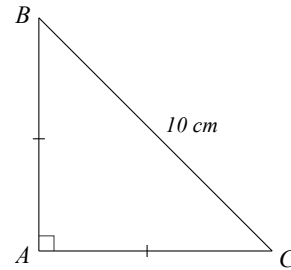
Bài 7: Cho Hình 4.

- a) Tính cạnh AC và BC
- b) Chứng minh rằng $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$.



Hình 4

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A ,
biết $BC = 10\text{ cm}$. Tính cạnh AB . (Hình 5).

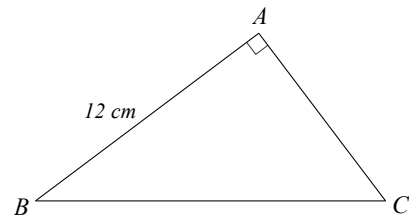


Hình 5

Bài 9: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có

$$AB = 12\text{ cm} \text{ và } \tan B = \frac{3}{4} \text{ (Hình 6).}$$

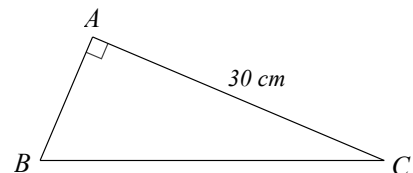
- a) Tính AC và BC .
- b) Tính số đo góc B .



Hình 6

Bài 10: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AC = 30\text{ cm}$

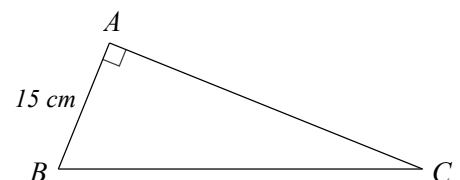
$$\text{Biết } \tan C = \frac{5}{12} \text{ (Hình 7). Tính } AB.$$



Hình 7

Bài 11: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 15\text{ cm}$

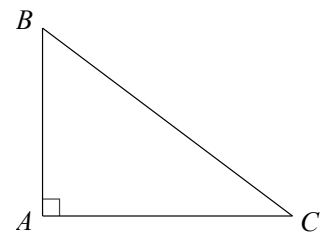
$$\text{Biết } \cot B = \frac{5}{13} \text{ (Hình 8). Tính } AC$$



Hình 8

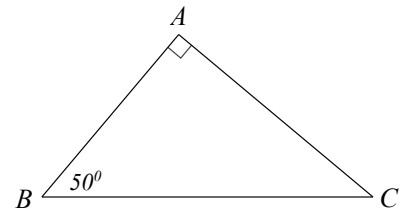
Bài 12: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Biết $\cos C = \frac{4}{5}$.

Tính tỉ số lượng giác của góc B . (Hình 9)



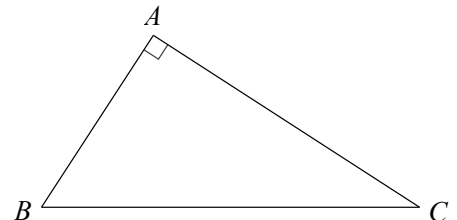
Hình 9

Bài 13: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Biết $\widehat{B} = 50^\circ$.
 Tính tỉ số lượng giác của góc C . (Hình 10)
 (Cho biết $\sin 50^\circ \approx 0,766$)



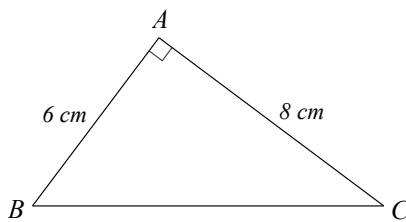
Hình 10

Bài 14: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Biết $\cos B = 0,6$
 Tính tỉ số lượng giác của góc C . (Hình 11)

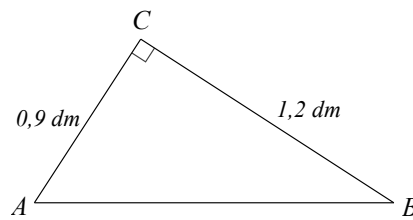


Hình 11

Bài 15: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$.
 Tính tỉ số lượng giác của góc B từ đó suy ra
 tỉ số lượng giác của góc C (Hình 12)



Hình 12

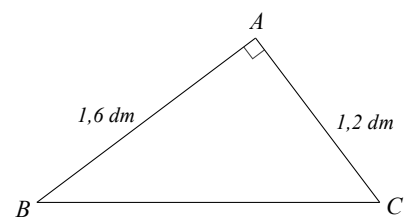


Hình 13

Bài 16: Cho $\triangle ABC$ vuông tại C có $AC = 0,9\text{ dm}$, $BC = 1,2\text{ dm}$. Tính tỉ số lượng giác của góc A từ đó
 suy ra tỉ số lượng giác của góc B (Hình 13)

Bài 17: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 1,6\text{ dm}$, $CA = 1,2\text{ dm}$.

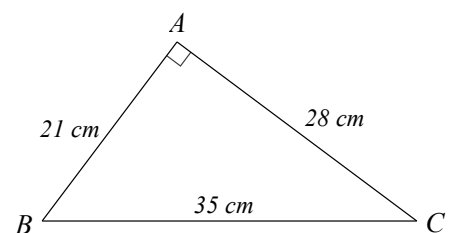
Tính các tỉ số lượng giác của góc C rồi suy ra tỉ số lượng
 giác của góc B . (Hình 14)



Hình 14

Bài 18: Cho $\triangle ABC$ biết $AB = 21\text{ cm}$, $AC = 28\text{ cm}$, $BC = 35\text{ cm}$.

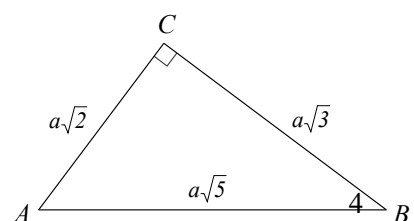
- Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.
- Tính $\sin B$, $\sin C$ (Hình 15)



Hình 15

Bài 19: Cho $\triangle ABC$ có $AB = a\sqrt{5}$, $BC = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$.

- Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác vuông. (Hình 16)
- Tính các tỉ số lượng giác của góc B .

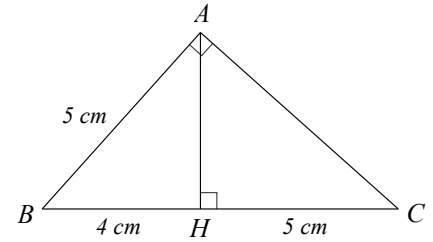


Hình 16

Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A

Bài 20: Cho Hình 17.

- Tính các góc của $\triangle ABC$
- Tính chu vi và diện tích của $\triangle ABC$



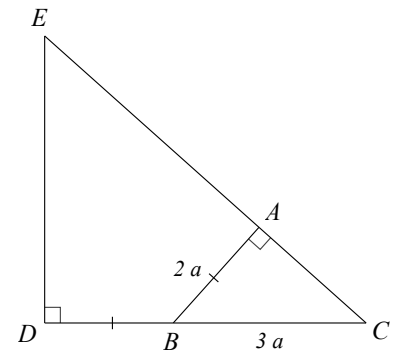
Hình 17

Bài 21: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 2a$, $BC = 3a$

Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = 2a$.

Tại D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E .

- Chứng minh rằng $DE \cdot AC = 10a^2$ (Hình 18)
- Tính $\widehat{BCA}$ và tính AC , DE theo a .

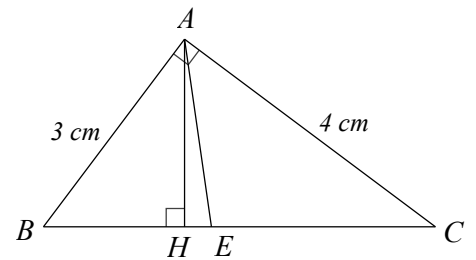


Hình 18

Bài 22: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

Biết $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$ (Hình 19)

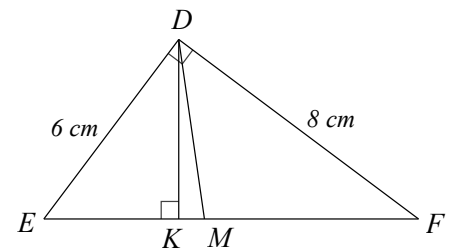
- Tính độ dài BC , AH
- Tính số đo góc B , C
- Đường phân giác trong của góc A cắt BC tại E .
Tính BE , CE



Hình 19

Bài 23: Cho $\triangle DEF$ có $DE = 6\text{ cm}$, $DF = 8\text{ cm}$, $EF = 10\text{ cm}$ (Hình 20)

- Chứng minh rằng $\triangle DEF$ là tam giác vuông.
- Đường cao DK . Tính DK và FK .
- Tính góc E , F .
- Phân giác DM của $\triangle DEF$. Tính ME , MF



Hình 20

Bài 12: Một số hệ thức giữa cạnh, góc trong tam giác vuông và ứng dụng.

A. LÝ THUYẾT.

1) Hệ thức giữa cạnh huyền và cạnh góc vuông.

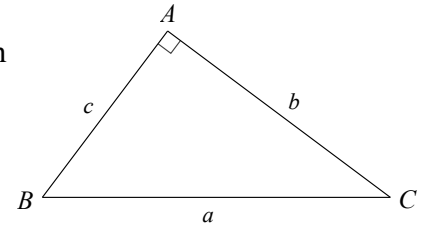
Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , cạnh huyền a và hai cạnh góc vuông là b, c như hình bên

♣ Định lý 1:

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc cosin góc kề.

$$+ b = a \cdot \sin B \text{ hoặc } b = a \cdot \cos C$$

$$+ c = a \cdot \sin C \text{ hoặc } c = a \cdot \cos B$$



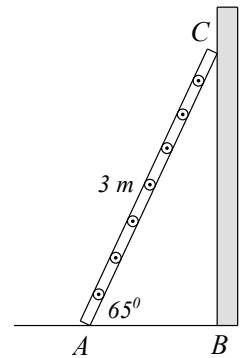
Ví dụ 2: Một chiếc thang dài 3 m , cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng bao nhiêu mét (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) để nó tạo với mặt đất một góc “an toàn” 65° (tức là đảm bảo thang chắc chắn khi sử dụng).

Bài làm

Giả sử đoạn AC là chiều dài chiếc thang, AB là khoảng cách chân thang tới chân tường và C là điểm thang tiếp xúc với tường.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại B nên ta có $AB = AC \cdot \cos A = 3 \cdot \cos 65^\circ \approx 1,27\text{ m}$

Vậy cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng $1,27\text{ m}$



2) Hệ thức giữa hai cạnh góc vuông.

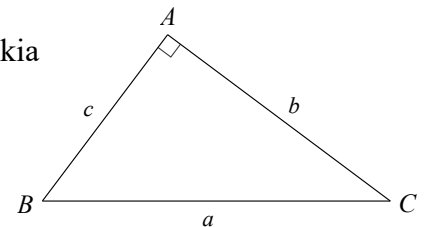
Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , cạnh huyền a và hai cạnh góc vuông là b, c như hình bên

♣ Định lý 2:

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc cotang góc kề.

$$+ b = c \cdot \tan B \text{ hoặc } b = c \cdot \cot C$$

$$+ c = b \cdot \tan C \text{ hoặc } c = b \cdot \cot B$$



Ví dụ 2: Bóng trên mặt đất của một cây dài 25 m . Tính chiều cao của cây

(làm tròn đến dm) biết rằng tia nắng tạo với mặt đất một góc 40° .

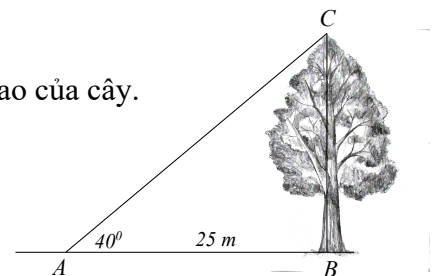
Bài làm

Giả sử AB là độ dài bóng của cây trên mặt đất và BC là chiều cao của cây.

$\triangle ABC$ vuông tại B nên ta có:

$$BC = AB \cdot \tan A = 25 \cdot \tan 40^\circ \approx 21\text{ m}$$

Vậy cây cao gần 21 m .



3) Giải tam giác vuông.

- ♣ Trong một tam giác vuông, nếu cho biết trước hai cạnh (hoặc một góc nhọn và một cạnh) thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và các góc còn lại của tam giác vuông đó. Bài toán này gọi là bài toán giải tam giác vuông.

Ví dụ 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 4$, $BC = 8$. Tính cạnh AC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) và các góc B, C (làm tròn đến độ)

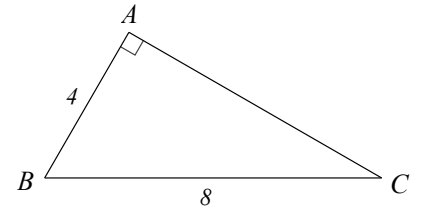
Bài làm

$\triangle ABC$ vuông tại A , nên ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow AC = \sqrt{48} \approx 6.928$$

$$\text{Ta có } \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ$$

$$\text{Khi đó } \widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 30^\circ.$$



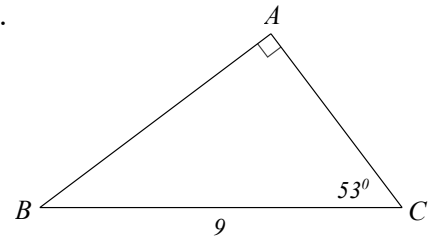
Ví dụ 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $BC = 9$ và $\widehat{C} = 53^\circ$. Giải $\triangle ABC$.

Bài làm

$$\text{Ta có } \widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$

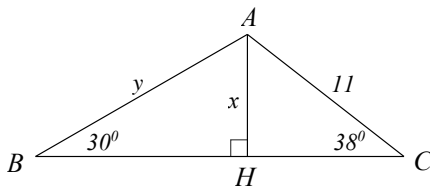
$$AB = BC \cdot \sin C = 9 \cdot \sin 53^\circ \approx 7,2$$

$$AC = BC \cdot \cos C = 9 \cdot \cos 53^\circ \approx 5,4$$

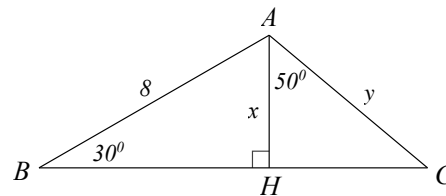


B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

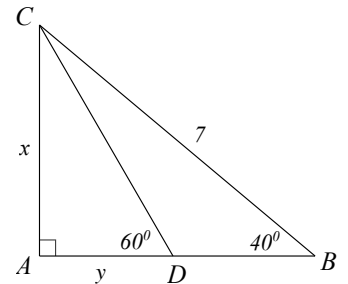
Bài 1: Tìm x, y trong các hình sau



Hình 1

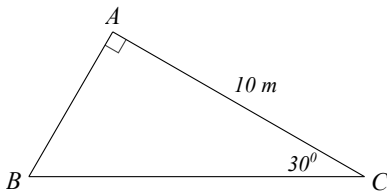


Hình 2

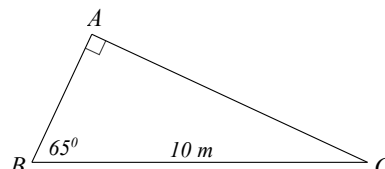


Hình 3

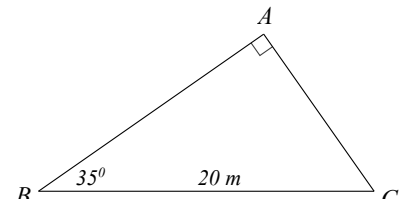
Bài 2: Giải $\triangle ABC$ trong các hình sau



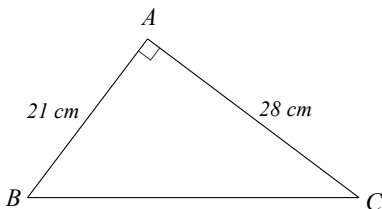
Hình 4



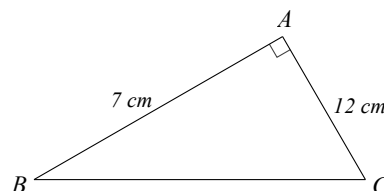
Hình 5



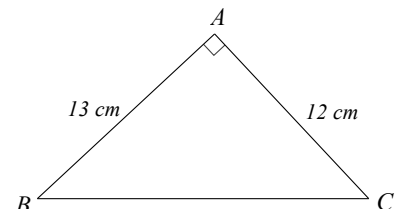
Hình 6



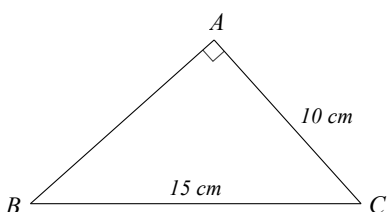
Hình 7



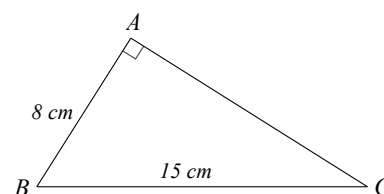
Hình 8



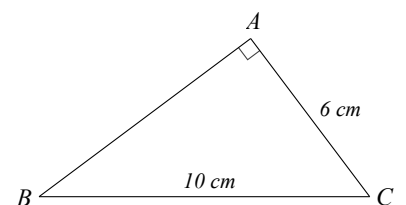
Hình 9



Hình 10

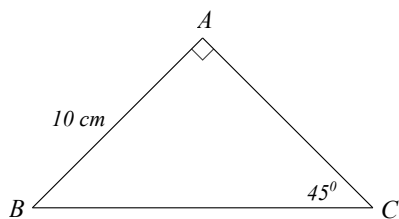


Hình 11

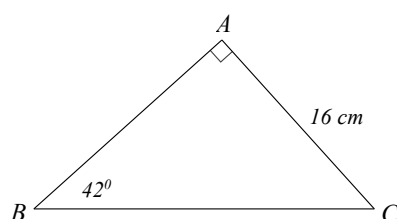


Hình 12

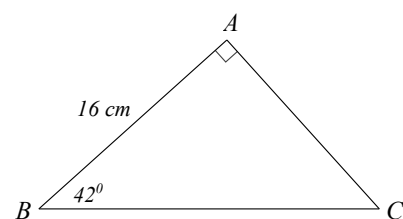
Bài 3: Giải $\triangle ABC$ trong các hình sau



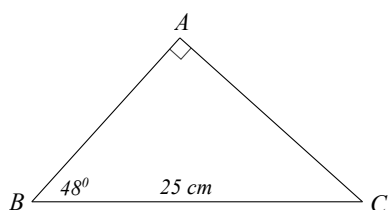
Hình 13



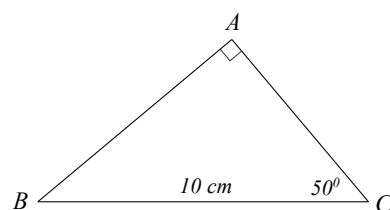
Hình 14



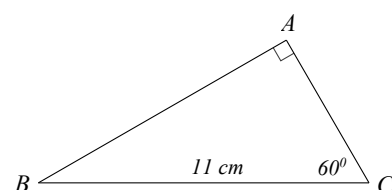
Hình 15



Hình 16

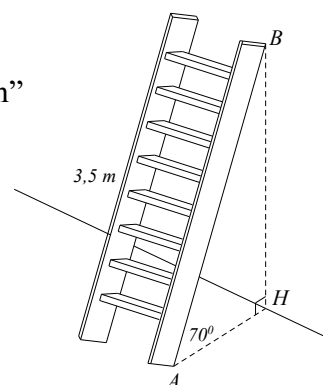


Hình 17

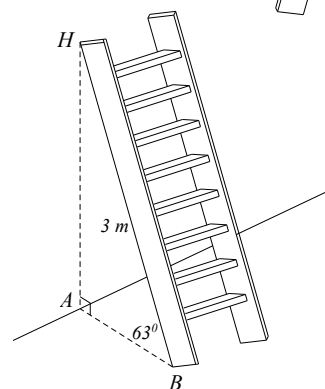


Hình 18

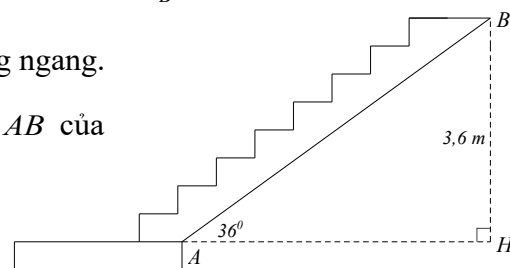
Bài 4: Một chiếc thang dài $3,5\text{ m}$. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng cách bằng bao nhiêu để nó tạo được với mặt đất một góc “an toàn” là 70° (để thang không bị đổ khi sử dụng). Kết quả làm tròn đến dm .



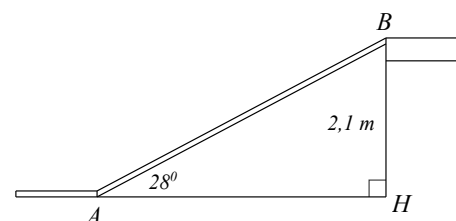
Bài 5: Một chiếc thang dài 3 m được bắc vào một bức tường. Để đảm bảo an toàn thì góc tạo bởi chiếc thang so với mặt đất là 63° . Hỏi phải đặt chân thang cách chân tường bao nhiêu mét? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



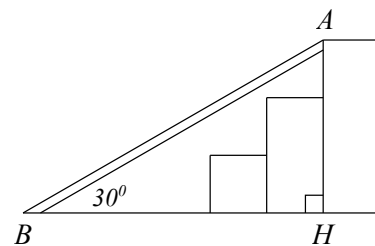
Bài 6: Một gia đình làm cầu thang có độ dốc là 36° so với phương ngang. Chiều cao từ sàn nhà tới trần nhà là $3,6\text{ m}$. Tính chiều dài AB của mặt cầu thang (làm tròn đến hàng đơn vị)



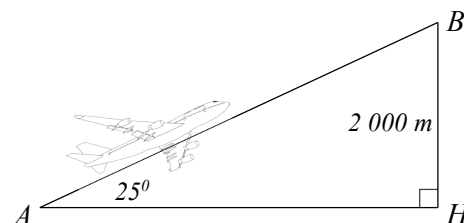
Bài 7: Một cầu trượt trong công viên có độ cao $2,1\text{ m}$ được đặt nghiêng so với mặt đất một góc 28° . Tính độ dài của mặt cầu trượt.



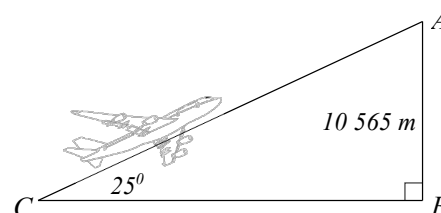
Bài 8: Bậc cửa nhà bác Nam cao 55 cm . Để đưa xe máy vào nhà, bác cần đặt một chiếc cầu sắt để dặt xe sao cho góc giữa mặt cầu và mặt đất khoảng 30° . Hỏi mặt cầu dài bao nhiêu cm



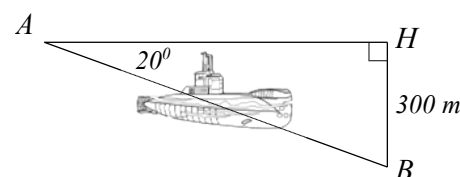
Bài 9: Một chiếc máy bay cất cánh theo một góc 25° so với mặt đất. Hỏi muốn đạt độ cao 2000 m thì máy bay phải bay một đoạn đường là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)



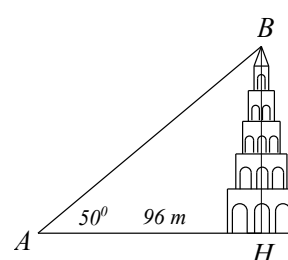
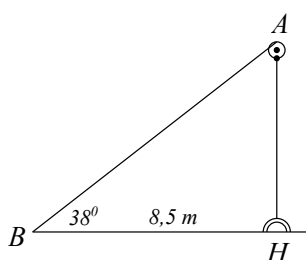
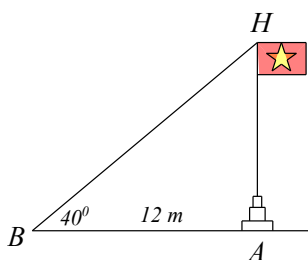
Bài 10: Một chiếc máy bay bay lên. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 25° . Sau 5 phút máy bay bay lên đạt độ cao là $10\,565\text{ m}$. Hỏi vận tốc trung bình của máy bay là bao nhiêu km/h



Bài 11: Một chiếc tàu ngầm đang ở trên mặt biển bắt đầu lặn xuống và di chuyển theo đường thẳng tạo với mặt nước một góc 20° . Một lúc sau, tàu ở độ sâu 300 m so với mặt nước biển. Hỏi tàu đã di chuyển bao nhiêu mét (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)



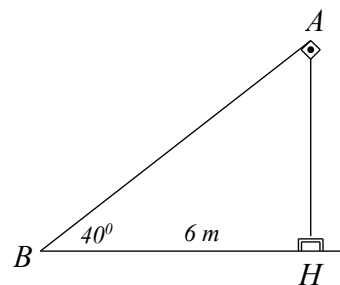
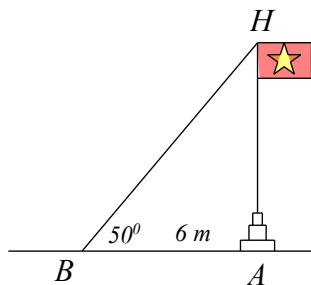
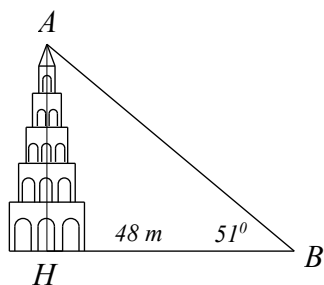
Bài 12: Lúc 10 giờ sáng, bóng của một cột cờ trên sân đo được dài 12 m . Tính chiều cao của cột cờ, biết tại thời điểm đó thì tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc khoảng 40° (làm tròn đến mét)



Bài 13: Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài $8,5\text{ m}$. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 38° . Tính chiều cao của cột đèn.

Bài 14: Tính chiều cao của một cột tháp, biết rằng lúc tia sáng của mặt trời tạo với phương nằm ngang của mặt đất một góc bằng 50° thì bóng của nó trên mặt đất dài 96 m

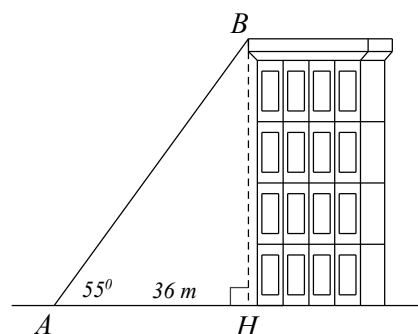
Bài 15: Tính chiều cao của một cột tháp (làm tròn đến mét) biết rằng lúc tia sáng của mặt trời tạo với phương nằm ngang của mặt đất một góc 51° , thì bóng của nó trên mặt đất dài 48 m .



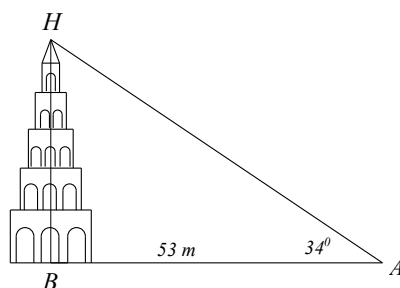
Bài 16: Chiều dài bóng cột cờ trên mặt đất là 6 m . Tại thời điểm đó thì góc mà tia nắng mặt trời tạo với mặt đất là 50° . Hỏi cột cờ cao bao nhiêu mét.

Bài 17: Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 6 m . Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 40° . Tính chiều cao của cột đèn

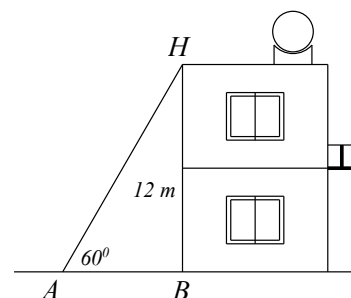
Bài 18: Tại một thời điểm trong ngày, tia nắng mặt trời hợp với mặt đất một góc bằng 55° . Một tòa nhà có bóng xuống mặt đường một đoạn có độ dài 36 m . Tính chiều cao của tòa nhà.



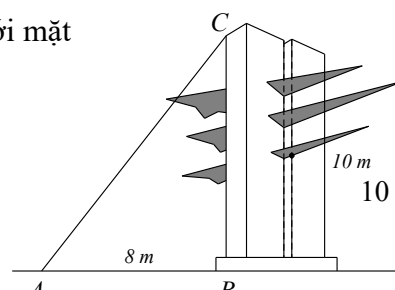
Bài 19: Một tòa tháp có bóng trên mặt đất dài 53 m . Biết rằng các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 34° . Tính chiều cao của tòa tháp (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



Bài 20: Một ngôi nhà cao 12 m . Khi tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 60° thì bóng tòa nhà trên mặt đất dài bao nhiêu mét?

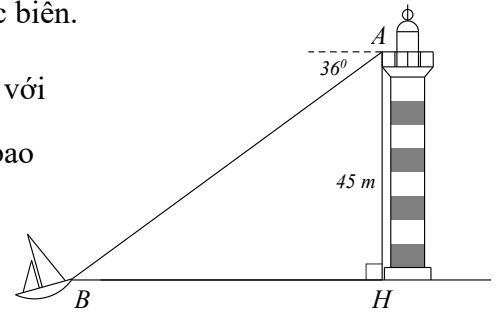


Bài 21: Tượng đài “Ba mũi tên đồng” – tượng đài chiến thắng Ngọc Hồi cao 10 m . Tại một thời điểm trong ngày bóng của tượng đài trên mặt đất dài 8 m . Hỏi lúc đó góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất là bao nhiêu (làm tròn đến độ)

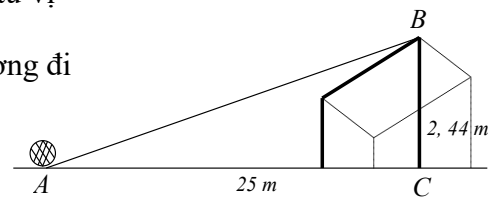


Bài 22: Từ đỉnh A của một ngọn đèn biển cao 45 m so với mặt nước biển.

người ta nhìn thấy một con tàu ở vị trí B dưới góc 36° so với phương nằm ngang. Hỏi khoảng cách từ tàu đến chân đèn là bao nhiêu mét?

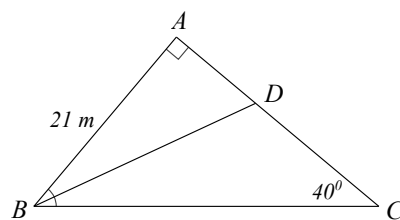
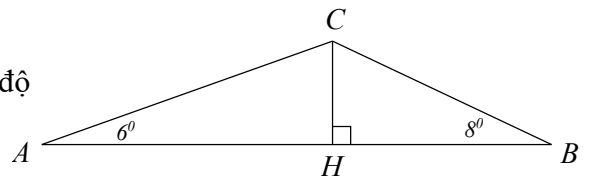


Bài 23: Một cầu thủ sút bóng bị va vào góc trên bên phải của cầu môn và dội ngược trở lại. Biết cầu môn cao $2,44\text{ m}$ và khoảng cách từ vị trí sút bóng đến chân cầu môn là 25 m . Tính góc tạo bởi đường đi của bóng so với mặt đất (số đo góc làm tròn đến độ)



Bài 24: Lúc 7 giờ 10 phút sáng. Bạn Hùng đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải lên và xuống một con dốc (như hình vẽ). Cho biết độ cao dốc $CH = 20\text{ m}$, góc $\widehat{A} = 6^\circ$ và góc $\widehat{B} = 4^\circ$

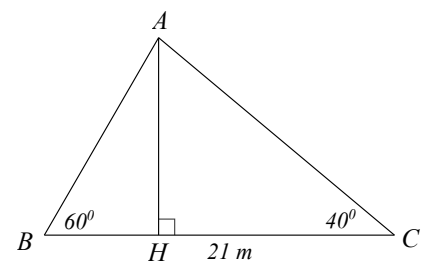
- Tính khoảng cách AB
 - Hỏi bạn Hùng đến trường lúc mấy giờ?
- Biết rằng tốc độ trung bình lên dốc là 4 km/h và tốc độ trung bình xuống dốc là 10 km/h



Hình 2

Bài 25: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 12\text{ cm}$, $\widehat{C} = 40^\circ$.

Tính độ dài AC , BC và đường phân giác BD (Hình 2)



Hình 3

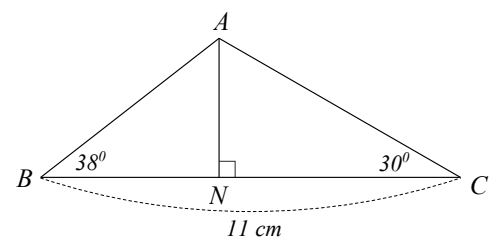
Bài 26: Cho $\triangle ABC$ có $BC = 21\text{ m}$ và $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$ (Hình 3)

- Tính đường cao AH và AC
- Tính diện tích $\triangle ABC$

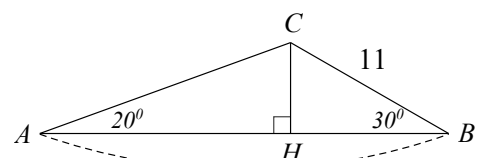
Bài 27: Cho $\triangle ABC$ có $BC = 11\text{ cm}$, $\widehat{ABC} = 38^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC .

- Tính AN (Hình 4)
- Tính AC



Hình 4

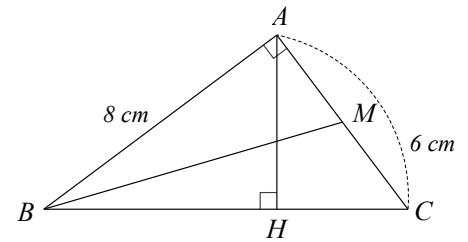


Bài 28: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 20^\circ$, $\widehat{B} = 30^\circ$ và $AB = 60 \text{ cm}$.

Đường cao CH . Tính AH , BH và CH . (Hình 5)

Bài 29: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Biết $AC = 6 \text{ cm}$, $AB = 8 \text{ cm}$

- Giải $\triangle ABC$ (Hình 6)
- Kẻ đường cao AH . Tính AH , BH
- M là trung điểm của AC . Tính $\widehat{AMB}$.

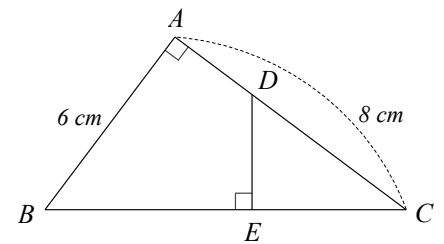


Hình 6

Bài 30: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$

- Giải $\triangle ABC$ (Hình 7)
- Chứng minh rằng $AB \cdot \cos B + AC \cdot \cos C = BC$
- Trên AC lấy điểm D sao cho $DC = 2 \cdot DA$. Vẽ $DE \perp BC$

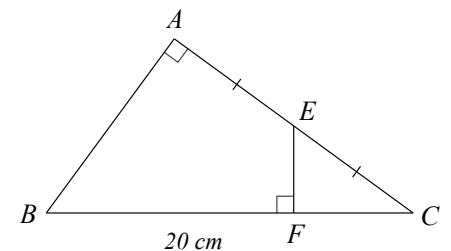
Chứng minh rằng $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{9DE^2}$



Hình 7

Bài 31: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Từ trung điểm E của cạnh AC kẻ $EF \perp BC$

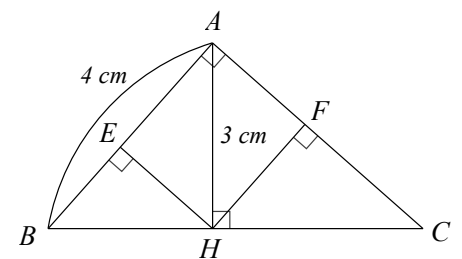
- Cho $BC = 20 \text{ cm}$, $\sin C = 0,6$. Giải $\triangle ABC$ (Hình 8)
- Chứng minh $AC^2 = 2 \cdot CF \cdot CB$
- Chứng minh $AF = BE \cdot \cos C$



Hình 8

Bài 32: Cho $\triangle ABC$, đường cao AH . Từ H kẻ $HE \perp AB$ và $HF \perp AC$

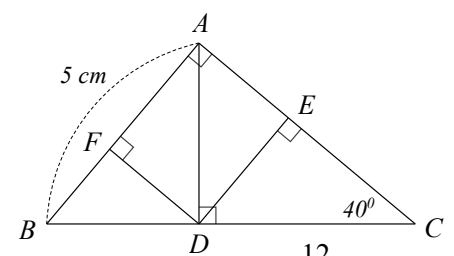
- Chứng minh rằng $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ (Hình 9)
- Cho biết $AB = 4 \text{ cm}$, $AH = 3 \text{ cm}$. Tính độ dài AE và BE
- Biết $\widehat{HAC} = 30^\circ$. Tính FC



Hình 9

Bài 33: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 5 \text{ cm}$, $\widehat{C} = 40^\circ$

- Giải $\triangle ABC$. (Hình 10)
- Vẽ đường cao AD , từ D kẻ $DE \perp AC$, $DF \perp AB$
Chứng minh $AF \cdot AB = AE \cdot AC$.

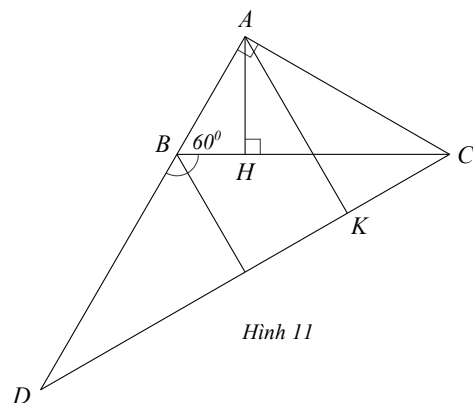


Hình 10

Bài 34: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 6\text{ cm}$ (Hình 11)

- Tính AB , AC .
- Kẻ đường cao AH . Tính HB , HC
- Trên tia đối của tia BA , lấy điểm D sao cho $DB = BC$.
Chứng minh $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$

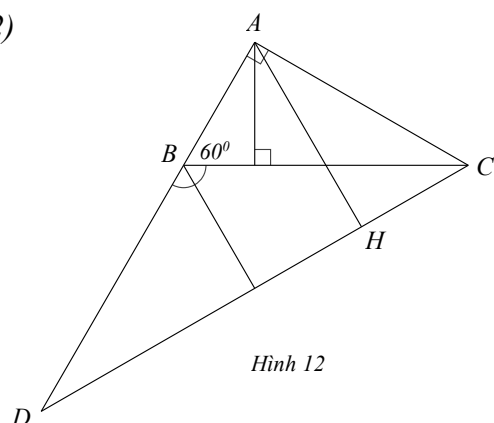
- Từ A kẻ đường thẳng song song với phân giác $\widehat{CBD}$ cắt CD tại K . Chứng minh $\frac{1}{KD \cdot KC} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$



Hình 11

Bài 35: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 6\text{ cm}$ (Hình 12)

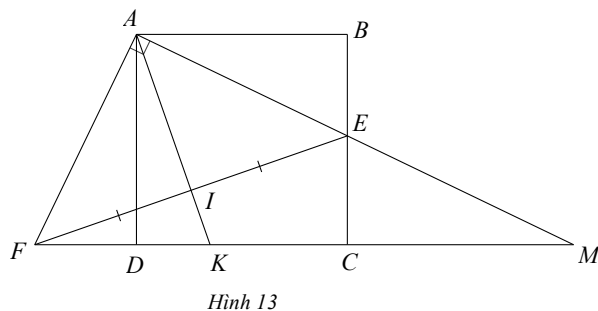
- Tính AB , AC
- Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$.
Chứng minh $AB \cdot CD = AC \cdot BD$
- Đường thẳng song song với tia phân giác $\widehat{CBD}$ kẻ từ A cắt CD tại H . Chứng minh rằng $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$



Hình 12

Bài 36: Cho hình vuông $ABCD$ và điểm E tùy ý trên BC . Tia Ax vuông góc với AE cắt CD tại F . Trung tuyến AI của $\triangle AEF$ và kéo dài cắt CD tại K . (Hình 13)

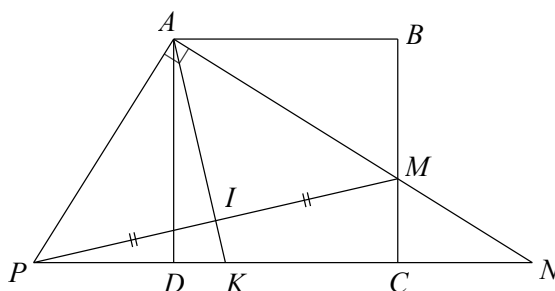
- Chứng minh $AE = AF$
- Chứng minh $\triangle AKF \sim \triangle CAF$ và $AF^2 = KF \cdot CF$
- Cho $AB = 4\text{ cm}$, $BE = \frac{3}{4}BC$. Tính diện tích $\triangle AEF$
- AE cắt CD tại M . Chứng minh $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AM^2}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm E



Hình 13

Bài 37: Cho $\triangle APN$ vuông tại A có $\widehat{P} = 58^\circ$ và $PN = 72\text{ cm}$ (Hình 14)

- Giải $\triangle APN$
- Kẻ đường cao AD . Dựng hình vuông $ABCD$ sao cho C, P khác phía đối với điểm D . AN cắt BC tại M . Chứng minh $\triangle APM$ cân.
- Kẻ trung tuyến AI của $\triangle APM$ cắt CD tại K . Chứng minh rằng $AP^2 = KP \cdot CP$
- Chứng minh rằng $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AB^2}$

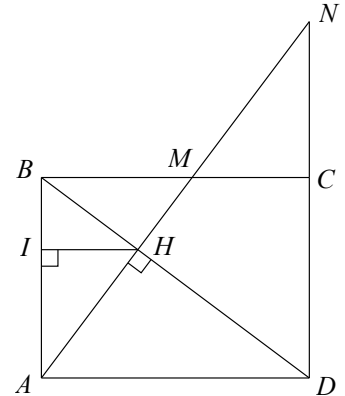
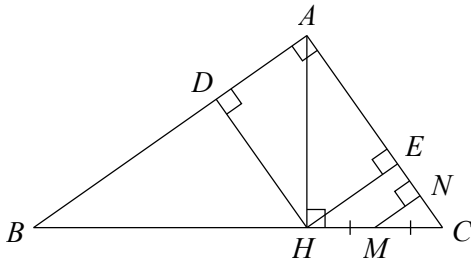


Hình 14

Bài tập ôn tập chương 4.

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

- Biết $BH = 4\text{ cm}$, $CH = 2\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AH , AB (làm tròn đến một chữ số thập phân)
- Gọi D , E lần lượt là chân đường vuông góc của H trên AB , AC . Chứng minh $\cos^3 B = \frac{BD}{BC}$
- Gọi M là trung điểm của HC , N là hình chiếu của M trên AC .
Chứng minh $MC^3 = \frac{1}{2} \cdot NC^2 \cdot BC$.



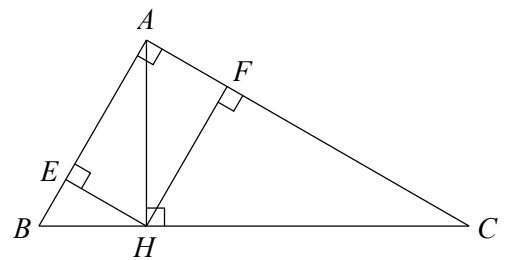
Bài 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 9\text{ cm}$, $BC = 12\text{ cm}$. Kẻ $AH \perp BD$ tại H .

- Tính BD , AH , góc $\widehat{BDA}$
- Kẻ $HI \perp AB$. Chứng minh rằng $AI \cdot AB = DH \cdot HB$
- Đường thẳng AH cắt BC tại M và cắt DC tại N .
Chứng minh $HA^2 = HM \cdot HN$

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 3\text{ cm}$, $BC = 6\text{ cm}$

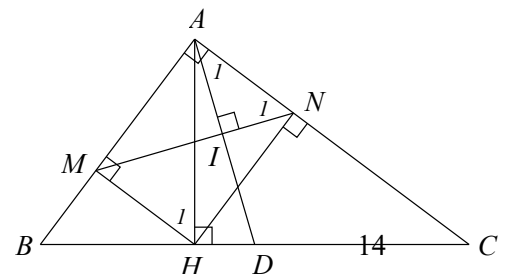
- Giải tam giác vuông $\triangle ABC$.
- Tính HB , HC
- Từ H kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$ ($E \in AB$, $F \in AC$).

Chứng minh rằng $EA \cdot EB + AF \cdot FC = \left(\frac{HE}{\sin \widehat{HAE}} \right)^2$



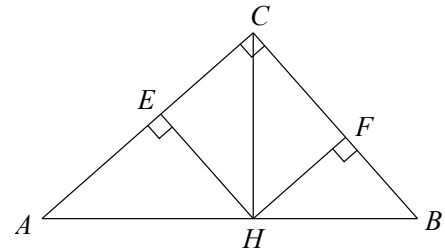
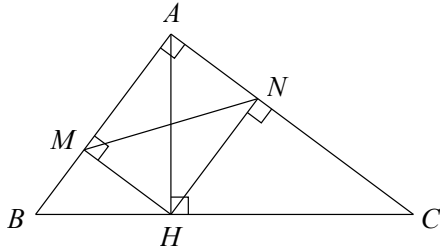
Bài 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , ($AB < AC$), đường cao AH . Vẽ HM vuông góc với AB tại M , HN vuông góc với AC tại N

- Cho biết $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$. Tính độ dài BC , AH và số đo các góc B , C .
- Chứng minh rằng $AM \cdot AB = AN \cdot AC$
- Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với MN cắt BC tại D .
Chứng minh D là trung điểm của BC .



Bài 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , ($H \in BC$)

- Biết $AB = 12 \text{ cm}$, $BC = 20 \text{ cm}$. Tính AC , AH và $\widehat{ABC}$ (làm tròn đến độ)
- Kẻ HM vuông góc với AB tại M , HN vuông góc với AC tại N . Chứng minh $AH = MN$ và $AM \cdot MB + AN \cdot NC = AH^2$
- Chứng minh rằng $\tan^3 \widehat{C} = \frac{BM}{CN}$

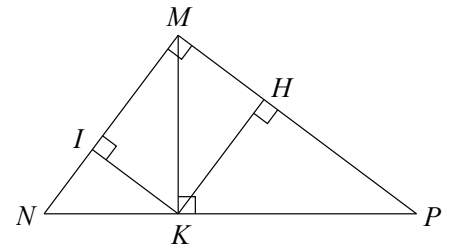


Bài 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại C , có độ dài cạnh AC và BC lần lượt là 20 cm , 15 cm . Vẽ đường cao CH , kẻ HE vuông góc với AC tại E , HF vuông góc với BC tại F

- Tính số đo $\widehat{A}$, độ dài AB , EF
- Chứng minh rằng $AC \cdot EC = BC \cdot FC$

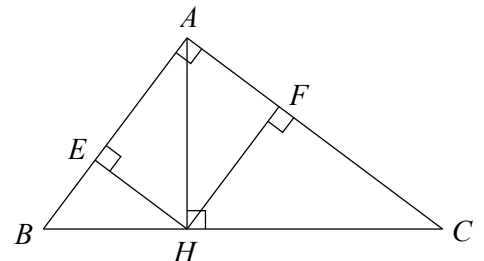
Bài 7: Cho $\triangle MNP$ vuông tại M có độ dài cạnh $MN = 6 \text{ cm}$ và $MP = 8 \text{ cm}$. Vẽ đường cao MK , kẻ KI vuông góc với MN tại I , KH vuông góc với MP tại H

- Tính độ dài NP , IH và số đo góc $\widehat{P}$
- Chứng minh rằng $MI \cdot MN = MH \cdot MP$



Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH .

- Cho biết $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BC , HB , AH
- Vẽ HE vuông góc với AB tại E , HF vuông góc với AC tại F . Chứng minh rằng $AE \cdot EB = EH^2$ và $AE \cdot EB + AF \cdot FC = EF^2$
- Chứng minh rằng $BE = BC \cdot \cos^3 \widehat{B}$



Bài 9: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , ($AB < AC$), đường cao AH .

- Giả sử $AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 12 \text{ cm}$. Tính độ dài BC , AH và số đo $\widehat{ABC}$
- Kẻ HD , HE lần lượt vuông góc với AB , AC . Chứng minh rằng $AD \cdot AB = AE \cdot AC$
- Lấy điểm G nằm giữa E và C . Kẻ AK vuông góc với BG tại K . Chứng minh rằng

$$\sin \widehat{AGB} \cdot \cos \widehat{ABC} = \frac{HK}{CG}$$

